Fonctions Logarithmes.

Fonctions Exponentielles

Résumé de cours

▹ Fonction Logarithme Népérien :

⊗ **Définition :**

La fonction Logarithme Népérien, notée ln ou Log , est la primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 .

⇒ **Conséquence** :

- $\text{Log} : IR^*_+ \mapsto IR$ avec $(\text{Log})'(x) = \frac{1}{x}$; et $\text{Log } 1 = 0$

  $x \to \text{Log } x$

⊗ **Propriétés :**

- $\text{Log}(a\,b) = \text{Log } a + \text{Log } b$; pour tout $a > 0$ et $b > 0$
- $\text{Log } \frac{1}{b} = -\text{Log } b$; pour $b > 0$
- $\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$; pour $a > 0$ et $b > 0$
- $\text{Log}(a^n) = n \text{ Log } a$; pour $a > 0$ et $n \in Z$
- $\text{Log } \sqrt{a} = \frac{1}{2} \text{Log } a$; pour $a > 0$

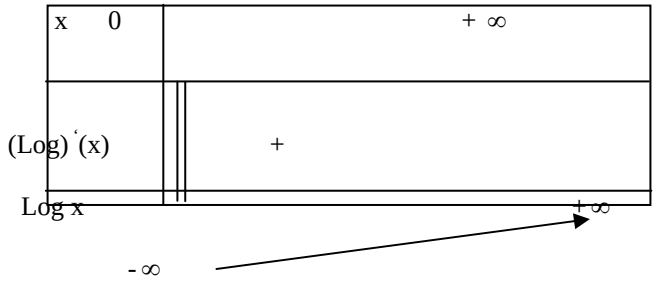
⊗ **Limites :**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log } x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \text{Log } x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \text{ Log } x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{Log } x}{x-1} = 1$

⊗ **Sens de variation :**

La fonction Logarithme Népérien est strictement croissante sur IR^*_+ et on a le tableau de variation suivant :



⇒ **Conséquences importantes :**

- La fonction Logarithme Népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR ;
- L'équation : Log x = 1 possède une seule solution notée : e ;

  on a donc Log e = 1 .
- Pour a > 0 et b > 0 on a : [Log a = Log b] ⇔ [a = b].

  [Log a ≥ Log b] ⇔ [a ≥ b].
- Pour tout $x \in]0,1]$ on a : Log x ≤ 0.
- Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : Log x > 0.

⊗ **Dérivées et primitives :**

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de IR alors la fonction : (Log o u) est dérivable sur I et on a : $(\text{Log o } u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Les primitives de la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions F définies sur I par : $F(x) = \text{Log}\,|u(x)| + k$; avec $k \in IR$

⊗ **Logarithme décimal :**

● La fonction logarithme décimal, notée log est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\log x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10}$; avec Log x est le logarithme Népérien de x.

● La fonction logarithme décimal possède les mêmes propriétés que la fonction logarithme Népérien, avec log 10 = 1.

▹ Fonctions Exponentielles :

⊗ **Définition :**

La fonction Exponentielle est la bijection réciproque de la fonction Logarithme Népérien qu'on note : $x \mapsto \exp(x)$

ou $x \mapsto e^x$

⇒ Conséquences :

● Pour tout $x \in IR$ et $y \in IR^*_+$ on a : $[\, y = e^x \,] \Leftrightarrow [\, x = \text{Log } y \,]$

d'ou :
$$\begin{cases} e^{\text{Log } y} = y & \text{pour tout } y \in IR^*_+. \\ \text{Log } e^x = x & \text{pour tout } x \in IR. \end{cases}$$

$e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

● La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.

● Pour tous réels a et b on a :

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

● La courbe de la fonction exponentielle est la symétrique de celle de la fonction Logarithme Népérien par rapport à la droite : y = x .

⊗ **Limites :**

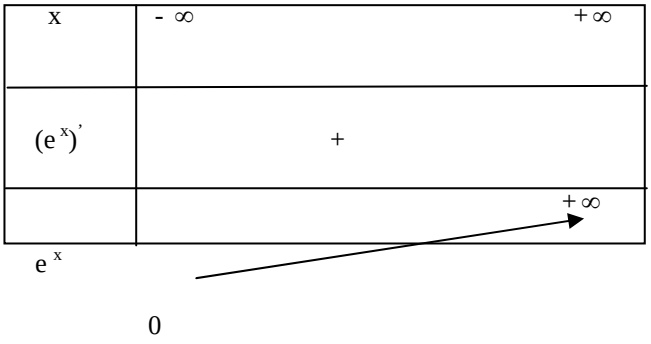
● $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ● $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

⊗ **Sens de variation :**

La fonction exponentielle est dérivable sur IR et sa fonction dérivée est lui-même.

On a donc : $(e^x)' = e^x$ et le tableau de variation suivant :



⊗ **Propriétés :**

Pour tout réels a et b on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $(e^x)^r = e^{rx}$ pour tout $r \in Q$

⊗ **Dérivées et primitives :**

- Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I de IR alors :

  la fonction $x \mapsto \exp o\, u\,(x)$ est dérivable sur I et on a :

  $$(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)} .$$

● Si f (x) = $u'(x)\,.e^{u(x)}$ alors les primitives de f sont les fonctions F définies sur I par : F (x) = $e^{u(x)}$ + k avec k $\in$ IR

⊗ **Fonction exponentielle de base a :**

● Soit a > 0; la fonction exponentielle de base a est définie sur IR par : $\exp_a(x) = a^x$

● On a pour a > 0 et x $\in$ IR on a : $a^x = e^{x \operatorname{Log} a}$

● La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur IR et on a :

$$(a^x)' = \operatorname{Log} a \,.\, e^{x \operatorname{Log} a} = a^x \,.\operatorname{Log} a$$

⊗ **Limites :**

● Si a $\in]0,1[$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

● Si a $\in]1,+\infty[$ on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

⊗ **Propriétés :**

Pour tout a > 0, b > 0 et (x, y) $\in IR^2$ on a :

● $a^x b^x = (ab)^x$ ● $a^x a^y = a^{x+y}$ ● $(a^x)^y = a^{xy}$

Courbe des fonctions Log et exp. :

